Progetto sperimentale di didattica multidisciplinare Matematica-Disegno-Storia

COSTRUZIONI CON RIGA E COMPASSO NELL'ETÀ CLASSICA

Prof. **Greco**
in collaborazione con Prof.ssa **Pasqualoni**, Prof.ssa **Canafoglia**

Liceo Scientifico "G. Marconi", Foligno

19–21 dicembre 2012

INFORMAZIONI

Le costruzioni geometriche sono tratte da `www.lorenzoroi.net`

Per la parte di storia della matematica si veda
Carl Boyer, **Storia della Matematica**, Mondadori

Dalla maturità del 2010

PROBLEMA 2

Nel piano riferito ad un sistema *Oxy* di coordinate cartesiane siano assegnate le parabole d'equazioni: $y^2 = 2x$ e $x^2 = y$.

a) Si disegnino le due parabole e se ne determinino le coordinate dei fuochi e le equazioni delle rispettive rette direttrici. Si denoti con *A* il punto d'intersezione delle due parabole diverso dall'origine *O*.

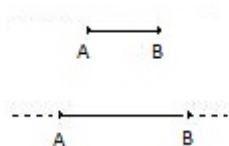
b) L'ascissa di A è $\sqrt[3]{2}$; si dica a quale problema classico dell'antichità è legato tale numero e, mediante l'applicazione di un metodo iterativo di calcolo, se ne trovi il valore approssimato a meno di 10^{-2}.

Dalla maturità del 2011 (q8)

In che cosa consiste il problema della *quadratura del cerchio*? Perchè è così spesso citato?

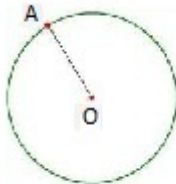
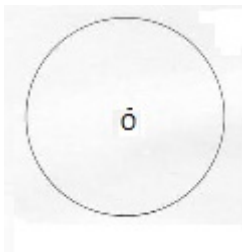
RIGA E COMPASSO: OPERAZIONI CONSENTITE

RIGA

- Tracciare un segmento che unisce due punti dati A e B
- Prolungare in una direzione un segmento dato AB

OSSERVAZIONI

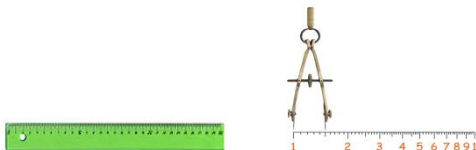
- Lo strumento riga traduce in pratica I e II postulato di Euclide
- La retta non è infinita, ma è un segmento prolungabile in modo indefinito

Compasso

- Tracciare una circonferenza con centro in punto O e raggio a piacere
- Dato un segmento OA, puntare il compasso in O e tracciare la circonferenza con centro O passante per A

Osservazioni

- Lo strumento compasso traduce in pratica III postulato di Euclide

OPERAZIONI NON CONSENTITE

- Scegliere due punti A e B su una retta in modo che il segmento AB abbia una lunghezza data
- Ripetere un'apertura a piacere del compasso precedentemente usata

OSSERVAZIONI

- I due divieti non permettono di riportare ovunque nel disegno una misura precedentemente ottenuta

Facciamo conoscenza

Euclide
(367 a.C. ca. - 283 a.C.)

LEGENDA

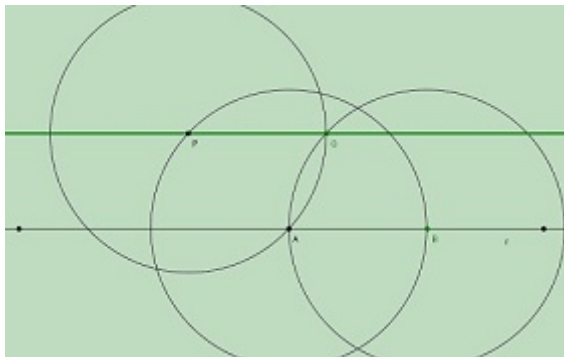
LEGENDA

Nelle spiegazioni delle costruzioni successivamente riportate:

- retta *sta per*
  traccio una retta con la riga
- circonferenza *sta per*
  traccio una circonferenza col compasso
- Dato $M = r1 \cap r0$ *sta ad esempio per*
  dato M il punto di intersezione tra la retta r0 e la retta r1

Cosa è possibile costruire?

Rette parallele

Data una retta r e un punto P esterno ad essa, è possibile costruire l'unica retta parallela a r passante per P?

Cosa è possibile costruire?

Parallela per un punto esterno

Sia $r1$ una retta e P un punto esterno a essa

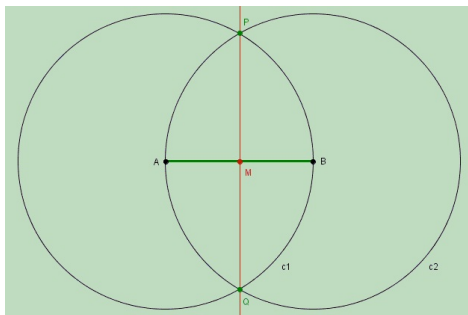
- circonferenza $c1$ centro P e raggio a piacere *maggiore distanza* P *da* $r1$
- Dato $A = r1 \cap c1$, circonferenza $c2$ centro A e raggio AP;
- Dato $B = r1 \cap c2$, circonferenza $c3$ centro B e raggio AB;
- Data $Q = c2 \cap c3$ *diversa da* A, retta $r2$ per P e Q;
- $r2$ è la retta cercata

Osservazioni

- La costruzione non è semplice
- Garantisce la possibilità di usare il V postulato di Euclide

Cosa è possibile costruire?

Bisezione di un segmento

Dato un segmento AB di lunghezza l, è possibile costruire un segmento di lungo la metà?

Cosa è possibile costruire?

Bisezione di un segmento: SI

Sia $r0$ la retta per A e B

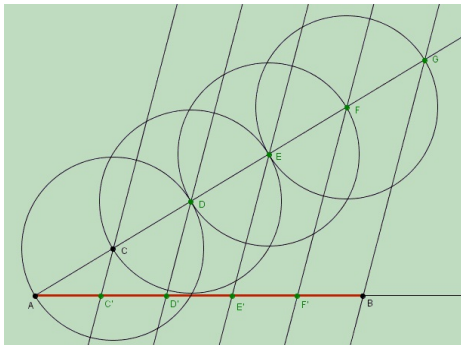
- circonferenza $c1$ centro A, raggio AB;
- circonferenza $c2$ centro B, raggio AB;
- retta $r1$ per P e Q intersezioni ottenute;
- Data $M = r1 \cap r0$, AM è il segmento cercato

Osservazioni

Questa costruzione permette anche di ottenere

- la perpendicolare a una retta data
- determinare il punto medio e l'asse di un segmento

DIVISIONE DI UN SEGMENTO IN n PARTI UGUALI

Dato un segmento AB di lunghezza l, è possibile costruire un segmento di lungo un terzo o un quarto o un quinto di quello dato?

(AB viene diviso in 5 parti uguali)

Cosa è possibile costruire?

Divisione in tre parti: SI

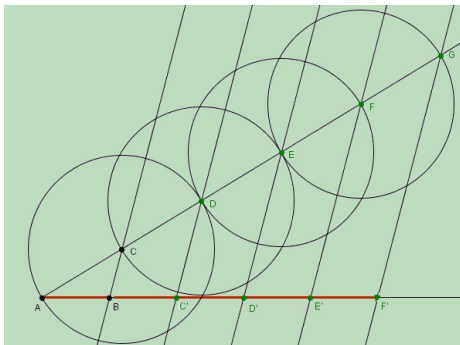
Costruiamo un segmento di lunghezza pari a un terzo di AB

1. Dato C non allineato con A e B, retta $r1$ per A e C;
2. circonferenza $c1$ centro C, raggio AC;
3. Dato $D = r1 \cap c1$, circonferenza $c2$ centro D, raggio $CD = AC$;
4. Dato $E = r1 \cap c2$, retta $r2$ per E e B;
5. retta $r3$ parallela passante per C;
6. Dato $C' = r1 \cap r3$, AC' è il segmento cercato

Osservazioni

Una costruzione nota riutilizza più volte la stessa apertura a piacere. Questa costruzione mostra che si può ottenere lo stesso risultato senza violare le regole di riga e compasso

MULTIPLO DI UN SEGMENTO

Dato un segmento AB di lunghezza l, è possibile costruire un segmento di lungo il doppio, il triplo?

(Viene costruito un segmento quintuplo di AB)

COSA È POSSIBILE COSTRUIRE?

SEGMENTO DOPPIO: SI

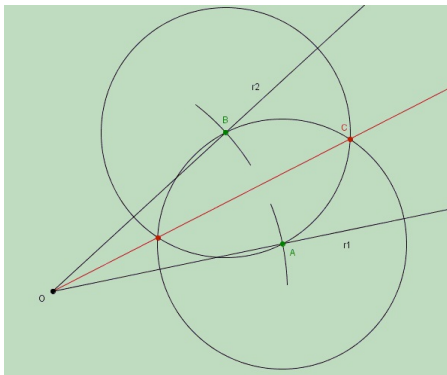
Otteniamo un segmento doppio di AB

1. Dato C non allineato con A e B, retta $r1$ per A e C;
2. circonferenza $c1$ centro C, raggio AC;
3. retta $r2$ parallela per C e B;
4. Dato $D = r1 \cap c1$, retta $r3$ per D parallela a $r2$;
5. Dato $C' = r1 \cap r3$, AC' è il segmento cercato

OSSERVAZIONI

Una costruzione nota riutilizza più volte la stessa apertura a piacere. Questa costruzione mostra che si può ottenere lo stesso risultato senza violare le regole di riga e compasso

Bisettrice di un angolo

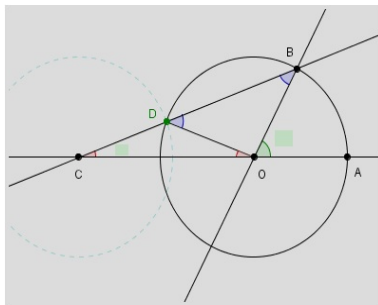
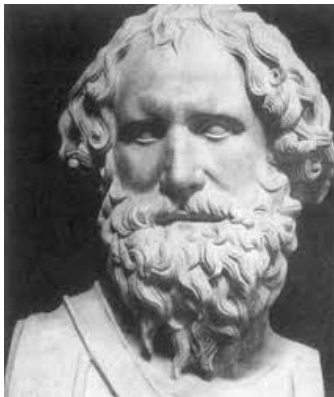
Dato un angolo di ampiezza α, è possibile costruire un angolo ampio la metà?

Cosa è possibile costruire?

Bisettrice di un angolo: SI

Siano $r1$ e $r2$ le semirette che costituiscono i lati dell'angolo e sia O la sua origine

- circonferenza $c1$ centro O, raggio a piacere;
- Dette A e B le intersezioni di $c1$ con i lati dell'angolo, circonferenza $c2$ centro A e raggio AB e circonferenza $c3$ centro B e raggio AB;
- Siano C e D le intersezioni di $c2$ e $c3$, retta $r3$ per C e D è la bisettrice

TRISETTRICE DI UN ANGOLO

Dato un angolo di ampiezza α, è possibile costruire un angolo ampio un terzo?

Archimede
(287 a.C. - 214 a.C.)

Cosa è possibile costruire?

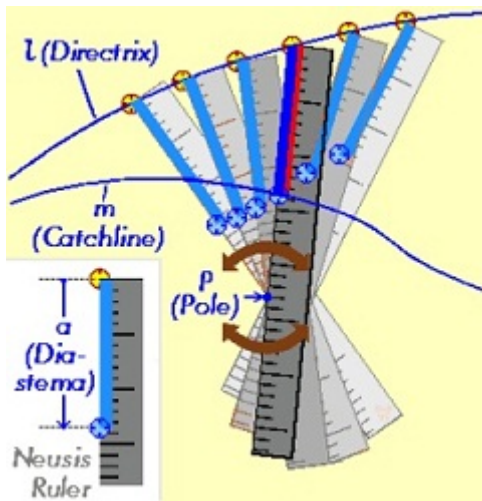
Trisezione, costruzione di Archimede: NON VA

Siano $r1$ e $r2$ le rette che costituiscono i lati dell'angolo e sia O la sua origine.

1. circonferenza $c1$ centro O, raggio a piacere; Siano A e B le intersezioni di $c1$ con i lati dell'angolo;
2. retta $r3$ per B in modo che, detta $C = r3 \cap c1$ e detta $D = r3 \cap r1$, risulti $OC = CD$;
3. L'angolo $O\hat{C}D$ è un terzo dell'angolo di partenza

Osservazioni

La costruzione fa uso di uno strumento non consentito al punto 2: la neusis

Riga, compasso e neusis?

(immagine da wikipedia)

DIMOSTRAZIONE

In ogni caso, la costruzione è corretta

- Si ha che $180° = A\hat{O}B + B\hat{O}D + D\hat{O}C$
- Per costruzione ODB è isoscele. Quindi, $B\hat{O}D = 180° - 2 \cdot O\hat{D}B$
- Anche DOC è isoscele. Quindi, $O\hat{C}D = D\hat{O}C$
- Per il teorema dell'angolo esterno $O\hat{D}B = 2 \cdot O\hat{C}D$
- Sostituendo le relazioni trovate, otteniamo
  $180° = A\hat{O}B + (180° - 4 \cdot O\hat{C}D) + O\hat{C}D$
  da cui la tesi $\quad 3 \cdot O\hat{C}D = A\hat{O}B$

OSSERVAZIONI

Alcuni angoli particolari (360°, 180°, 90°) si possono comunque trisecare solo con riga e compasso

UN DUBBIO STORICO

Perché Archimede, pur essendo greco, ha fatto una costruzione che **non** prevede **solo uso di riga e compasso**?

Problemi classici della geometria (euclidea)

I tre problemi classici

1. TRISEZIONE DELL'ANGOLO: Dato un angolo di ampiezza α, costruire un angolo ampio un terzo
2. DUPLICAZIONE DEL CUBO: Dato un cubo di spigolo unitario, costruire il lato di un cubo che abbia volume doppio
3. QUADRATURA DEL CERCHIO: Dato un cerchio di raggio unitario, costruire un quadrato a esso equivalente

Osservazioni

- Riga e compasso si **arenano** di fronte a questi tre problemi
- Nondimeno i matematici greci ne hanno cercato soluzioni sperimentando e ricercando **nuovi strumenti teorici e pratici**
- P.e. risoluzione tramite curve speciali già note ai greci: la trisettrice di Ippia, la parabola o la spirale di Archimede

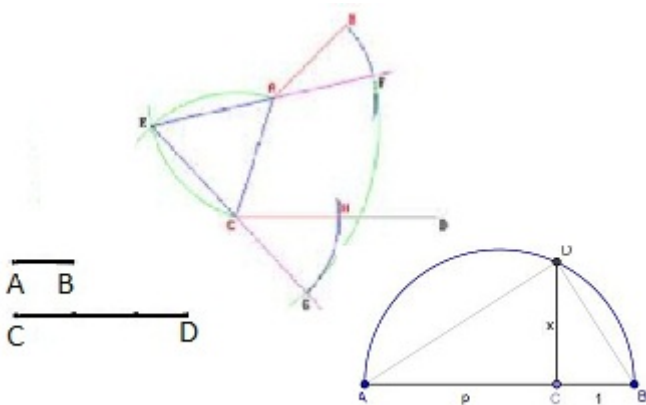
UN DUBBIO STORICO

Perché Archimede, pur essendo greco, ha fatto una costruzione che non prevede solo uso di riga e compasso?

UN DUBBIO MATEMATICO

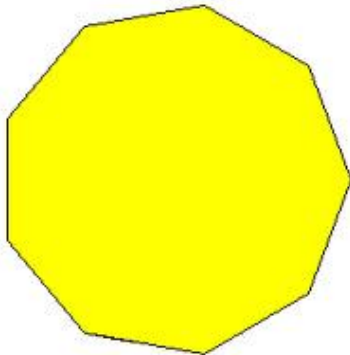
Perché **trisecare un angolo** qualsiasi dovrebbe essere così **difficile**?

COSTRUIBILITÀ

Un numero r è **costruibile** se, fissata una unità di misura, è possibile con l'utilizzo di riga e compasso costruire un segmento di lunghezza r

OSSERVAZIONI

- I numeri razionali positivi p/q sono tutti costruibili perché:
  (A) è possibile dividere un segmento in q parti uguali e costruire sottomultipli di un numero dato
  (B) è possibile costruire un segmento lungo p volte un segmento dato e costruire multipli di un numero dato
- I numeri tipo $\sqrt{p}$, con p naturale sono costruibili
- La somma di due numeri costruibili è costruibile
- Solo i numeri si possono scrivere come somma di numeri razionali e di radici quadrate sono costruibili:

$$2 + \sqrt{3} + 3\sqrt{5}$$

- Dietro ogni problema classico insoluto c'è un **numero non costruibile**

Non si può trisecare un **angolo di 60°**

perché la soluzione dell'equazione cubica $\frac{1}{2} = 4x^3 - 3x$ non è costruibile

(Pierre Wantzel, 1837)

Trisezione dell'angolo di 60°

Problemi insolubili derivati da quelli classici

INSCRIVIBILITA' DI UN POLIGONO:

Data una circonferenza di raggio unitario, inscrivere in essa un poligono regolare di n lati

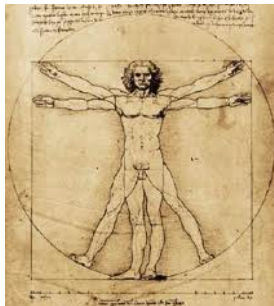
Osservazioni

- Non è risolubile nel caso $n = 9$ proprio perché non si può trisecare con riga e compasso un angolo di 60°
- Solo **Carl Friedrich Gauss** (1777-1855) e il già citato **Pierre Wantzel** hanno definitivamente dimostrato quali sono i poligoni regolari inscrivibili con riga e compasso in una circonferenza data

Duplicazione del cubo

Non si può determinare il lato doppio di un cubo dato perché $\sqrt[3]{2}$ non è costruibile

Cittadini di Delo non sapete duplicare un altare cubico? E allora beccatevi la peste

QUADRATURA DEL CERCHIO

Non si può costruire un quadrato equivalente a un cerchio dato perché π non è costruibile

OSSERVAZIONI

- Nella **geometria degli origami** un angolo qualsiasi si può trisecare: la costruzione ripropone la trisettrice di Ippia

OSSERVAZIONI

- Nella **geometria degli origami** un cubo si può duplicare perché $\sqrt[3]{2}$ si può ottenere tra le pieghe di un quadrato
- Per π non c'è nessuna speranza neanche qui

Domande incresciose

Un dubbio storico

Perché Archimede, pur essendo greco, ha fatto una costruzione che non prevede solo uso di riga e compasso?

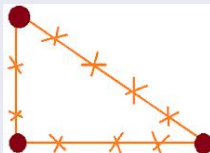
Un dubbio matematico

Perché trisecare un angolo qualsiasi dovrebbe essere così difficile?

Un dubbio filosofico

Perché sembra così **importante** usare **solo riga e compasso**?

EGIZI; RIF. PAPIRO DI MOSCA 1850 A.C.

- Sapevano usare bene solo **numeri interi** e frazioni dell'unità
- La geometria aveva un carattere esclusivamente **pratico** (ridisegnare i terreni dopo le esondazioni del Nilo)
- Conoscevano una terna pitagorica

BABILONESI, RIF.: PLIMPTON 322 [1900-1600 A.C.]

- Sapevano usare bene tutti i **numeri frazionari** con cui eseguivano calcoli anche complessi
- La geometria era un'**estensione** allo spazio dell'aritmetica
- Con ragionamenti geometrici e calcoli complessi hanno ottenuto risultati in astronomia
- Conoscevano molte terne pitagoriche, ma **non** avevano il **concetto di dimostrazione**

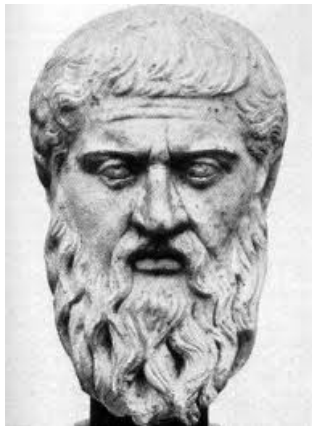
Aritmetica e geometria: Greci

Greci da Pitagora (VI sec. a.C.) in poi

- Usavano solo numeri interi (in aritmetica erano meno bravi)
- Visualizzavano i numeri interi come **lunghezze, aree e volumi** e i numeri **frazionari** come rapporti tra misure omogenee
- Svilupparono il pensiero astratto attraverso la Geometria
- Inventarono il concetto di dimostrazione/costruzione

Come già osservato

- STRUMENTI: prevalentemente riga e compasso, ma anche meccanici per problemi più complessi sin dal V sec. a.C.
- N.B.: La trisettrice di Ippia è del 420 a.C.. Con questa curva (non tracciabile con riga e compasso) si risolve anche la QUADRATURA del cerchio

Poi arrivò Platone (428 a.C. - 348 a.C.)

Grande filosofo

Non altrettanto famoso matematico, ma **molto da dire** a riguardo

Esame di maturità 2006, questionario domanda 2

Q2

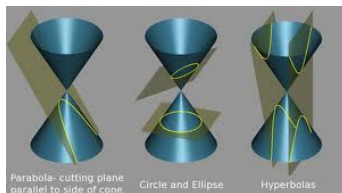
I poliedri regolari [noti anche come *solidi platonici*] sono, a meno di similitudini, solo cinque: il tetraedro, il cubo, l'ottaedro, il dodecaedro e l'icosaedro.
Sai dimostrarlo?

PLATONE, FILOSOFIA E MATEMATICA

- La filosofia platonica si basa sul concetto di **idea**: ogni cosa sulla Terra è immagine di una idea perfetta che abita nell'Iperuranio (dal greco, *al di là del cielo*)
- La geometria è molto importante perché consente di ragionare su concetti astratti
- Riga=retta e Compasso=circonferenza rimandano a due curve perfette
- L'impiego di mezzi meccanici nelle dimostrazioni geometriche **corrompe quanto c'è di buono** nella geometria (cfr. Plutarco, *Vita di Marcello*)

E allora **VIVA SOLO RIGA E COMPASSO**

OSSERVAZIONI

- **Euclide** usa solo costruzioni con riga e compasso, ma usa anche un metodo (esaustione) introdotto da Eudosso, discepolo di Platone, che al maestro forse non sarebbe piaciuto
- **Archimede** e **Apollonio** di Perga, le cui opere sono successive a quella euclidea, ricominciano a usare altre curve e altri mezzi nella geometria

Nel II sec. a.C. finisce il periodo aureo della geometria.

LATINI E ALTO MEDIOEVO

- I Latini dimostrano molto **senso pratico**, sono bravissimi ingegneri, ma sono poco interessati ai ragionamenti astratti.
- Il più importante matematico latino è il filosofo Boezio (428-524 d.C.) che scrive manuali, tra cui uno di geometria euclidea senza dimostrazioni
- Nell'alto Medio Evo si usa l'opera di Euclide come modello insuperabile, anzi non si prova neanche a superarla.

Dopo i Greci: Arabi

Dobbiamo aspettare il XIII sec. per veder rinascere in Europa un po' di interesse grazie al contatto con la cultura araba

Arabi

- Alcuni secoli dopo l'espansione, gli arabi cominciarono a nutrire interesse per le conquiste culturali dei popoli conquistati (Mesopotamia)
- Matematica: prendono contatti con la cultura indiana [che aveva sviluppato una **notazione posizionale** e in modo euristico aveva ottenuto risultati in aritmetica] e con la cultura greca
- L'**algebra** (parola araba) nasce da questo mix e dalla capacità degli arabi di sviluppare ragionamenti astratti.

Algebra pone le basi su quella che diventerà la più grande scoperta dei secoli a venire: la geometria analitica

Arrivederci!